DE SUPERFICIE ALIQUA, QUA CUIUSQUE SUPERFICIEI CURVATURA DEFINIRI POTEST.

DISSERTATIO

QUAM AUCTORITATE ET CONSENSU

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ACADEMIA VRATISLAVIENSI

PRO SUMMIS

IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE OBTINENDIS

DIE XXX. MENSIS MARTII MDCCCXLIV

H. L. Q. C.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

HERMANNUS MARBACH

OPPONENTIBUS

G. MAYWALD, PHIL. DR.

G. BAUM, PHIL. DR.

A. KENNGOTT, PHIL. DR.

VRATISLAVIAE

TYPIS GRASSII, BARTHII ET SOCII.

THESES.

1. Fluida sunt in se formata.
2. Notio, quam Berzelius constituit et „allotropiam" nominavit, non constituenda est.
3. Materia est continua et non continua habenda.
4. Disciplina, qua proportionales quantitates tractari solent, supervacanea est.

INTRODUCTIO.

Si per aliquod punctum A cujuslibet superficiei complura plana ponuntur, totidem planae curvae lineae oriuntur, quarum et centra et radii curvaturae ad illud ipsum punctum A pertinentes proprietatibus gaudent, quae non pendent ex indole superficiei ipsius. Inter sectiones normales, quae quidem per lineam normalem ad superficiem ducuntur, duae sunt, quae principales appellantur, quarum altera maximam, altera minimam habet curvaturam in illo communi puncto. Atque has sectiones sibi normales esse earumque radiis osculatoribus etiam aliarum sectionum normalium radios posse determinari Euler invenit. Hic enim curvaturam dicens fractionem, cujus numerator unitas sit, denominator radius osculator, demonstravit normalis sectionis cujuslibet esse curvaturam:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos v^2}{R} + \frac{\cos v_1{}^2}{R_1} \; \ldots\ldots \; (1)$$

si r radius illius sectionis est, R maximus valor, R_1 minimus ipsius r, sive R et R_1 radii sectionum principalium, quae sub angulis v et v_1 ad illius sectionis planum inclinatae sunt. Sequitur inde

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{R\,R_1}{R \sin v^2 + R_1 \cos v^2} \text{ vel} \\ r &= \frac{R\,R^1}{(R - R_1)\sin v^2 + R_1} \end{aligned}\right\} \; \ldots \; (2)$$

quum $v + v_1 = 90^0$ sit.

Huic Euleri theorematі Meunier aliud insigne adjunxit, quo obliquarum sectionum radii osculatores determinantur. Invenit enim obliquae sectionis radium:

$$\varrho = r \cos\varphi,$$

si r radius est normalis sectonis, et ϱ radius obliquae sectionis, quae eandem rectam lineam tangit atque normalis sectio, et φ denique angulus est, quem plana sectionum inter se constituunt.

SUPERFICIES DEDUCITUR, QUAE CUJUSQUE SUPERFICIEI DATAE CURVATURAM DEFINIT.

Ducamus per punctum A aliquod superficiei cujuslibet rectam lineam, quae superficiei et plano eandem in illo puncto A tangenti normaliter insistat. Plano per hanc normalem posito superficiem secantes lineam curvam in eodem plano sitam invenimus. Si porro circulum hanc curvam in puncto A osculantem construimus, et illud planum normaliter secans circa normalem (ut axem) agentes omnes circulos osculatores ducimus, qui sectionibus singulis respondent, superficiem novam ab omnibus circulis constitutam habemus. Jam apparet, hanc superficiem novam formatam omnibus circulis superficiem suppositam in puncto A dicto osculantibus ejus curvaturam omnes versus directiones definire et metiri.

Aequatione hujus superficiei inventa alias quoque ejusdem construendae rationes proferam, unde reliquae insignes proprietates proficiscentur, simulque patebit, indolem illius universalem non pendere ex prioris superficiei suppositae natura.

In fig. 1 sit A aliquod punctum superficiei alicujus, YAX planum eandem tangens in puncto A; ZA sit linea normalis ad planum YAX per punctum A posita; AQ sit linea recta aliqua in tangente plano ducta; ponatur porro

per lineas ZA et QA transiens et superficiem secans planum; lineam curvam hac ratione ortam circulus APD in puncto A osculetur; apparet omne punctum P circuli APD in nova superficie contineri, atque esse rectam $AP = AD$ cos $DAP = AD$ sin PAQ. Haec aequatio procedit, ubicunque recta AQ in plano XY et punctum P in circulo APD tangenti cuique AQ respondente situm est; vel: illa aequatio locum habet, si diameter AD plano ZAQ normali circa axem AZ verso atque si angulus PAQ variatur. Quodsi variabilis radius vector $AP = m$, angulus $PAQ = \omega$, diameter $AD = 2r$ ponuntur, erit $m = 2r \sin \omega$. Si porro sectiones prioris superficiei principales, ad quas radii osculatores R et R_1 petineant, in planis XAZ et YAZ sitas assumimus, apparet angulum QAX eum esse, quem supra littera v notaverimus. Substituto ergo ipsius r valore, de quo supra sermo fuit, aequatio jam inventa $m = 2r \sin \omega$ mutatur in:

$$m = \frac{2 R R_1 \sin \omega}{R \sin v^2 + R_1 \cos v^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

Haec aequatio, quae referenda est ad coordinatas polares m, v et ω, facile ad normales coordinatas transformari potest. Lineae rectae ZA, YA, XA, quas inter se normales esse ex antecedentibus cernitur, axes sint coordinatarum x, y, z. Itaque polares et normales coordinatae his notis aequationibus recte conjungi possunt:

$$\left.\begin{aligned} z &= m \sin \omega \\ y &= m \cos \omega \sin v \\ x &= m \cos \omega \cos v \\ \text{tang } v &= \frac{y}{x} \\ \text{tang } \omega &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ m &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Aequationes (2) et (3) igitur in usum vocatis coordinatis x, y, z, transeunt in

$$r = \frac{R R_1 \, (y^2 + y^2)}{R y^2 + R_1 \, x^2} \; \ldots\ldots \; (5)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,(R_1 x^2 + R y^2) = 2 R R_1 \, (x^2 + y^2) z \; \ldots \; (6)$$

INVENITUR SUPERFICIES, IN QUA OMNIA CURVATURAE CENTRA AD ALIQUOD CUJUSLIBET SUPERFICIEI PUNCTUM PERTINENTIA SITA SUNT.

Apparet, centra omnium normalium circulorum osculatorum in recta eaque linea normali, quem axem ipsarum z diximus, esse posita. At omnibus planis positis per lineam rectam aliquam, quae cum normali angulum format, sectiones obliquae, quae oriuntur, curvae sunt lineae, quarum (ad punctum commune A pertinentia) curvaturae centra lineam quandam duplicis curvaturae constituunt. Si denique ad omnes et normales et obliquas sectiones, quascunque transeuntes punctum A ponere possumus, centra curvaturae construimus, omnia haec centra novam superficiem formant. Cujus aequationem ut eruamus, theoremate jam citato et ab Meuniero invento uti necesse erit.

Ponamus systema coordinatarum eadem ratione, quam supra constituimus, alicui superficiei in aliquo puncto A appositum esse. Lineam rectam tangentem AQ_1 (fig. 2) in plano tangente XY sitam et normale planum ZAQ_1 et obliquum planum KAQ_1 transeant; haec duo plana angulum inclinationis KAZ habent, si recta AK quidem in plano KAQ_1 normalis ad rectam $Q_1 A$ ducta est. E sectionibus hoc modo ortis normalis habet in puncto aliquo C normalis lineae ZA centrum curvaturae (ad punctum A quidem pertinens), et obliqua sectio tale habet centrum

in recta AK, quam quidem rectam esse normalem ad sectionem obliquam apparet. Ad hoc alterum centrum inveniendum secundum theorema citatum sufficit de puncto C perpendiculum CM ad rectam AK demittere; hac enim constructione est recta $AM = AC \cos CAK$; est autem CAK angulus supra notatus per φ, quo plana Q_1AZ et Q_1AK sibi inclinantur. AC porro ille radius est r supra citatus; itaque AM est ϱ, obliquae scilicet sectionis radius, et M est quaesitum centrum. Unde fit, ut punctum M, si plano KAQ_1 vertendo circa tangentem Q_1A sensim quemque situm praebemus, in plano ZAK moveatur, in circulo, cujus diameter est recta CA. Si porro recta Q_1A in plano XY circa A vertitur, cuique situi hujus tangentis AQ_1 circulus respondet, in quo curvaturae centra locum obtinent, quae ad omnes sectiones tangentem communem habentes pertinent; atque omnes ii circuli superficiem aliquam constituunt. Haec igitur superficies locus geometricus, quem curvaturae in aliquo alicujus superficiei puncto inveniendae centrum in directiones omnes varians obtineat, dici potest.

Ut planum circuli CAM normale est tangenti AQ_1 in plano XY tangente ductae, ejusque circuli diameter AC aequalis est radio circuli, qui normalem sectionem in plano Q_1AZ sitam osculatur, atque igitur horum duorum circulorum plana CAK et Q_1AZ normaliter sibi insistunt, apparet sic cuique circulo normali superficiem suppositam osculanti (et superficiem aequatione (6) notatam formanti) alterum circulum respondere, qui in plano ad circuli osculantis planum normali situs dimidiam hujus diametrum et eundem quasi verticem (A) habeat et superficiem novam, modo inventam formet. Haec altera igitur superficies deducta curvaturae centra continens eandem indolem et naturam atque illa circulis osculantibus normalibus formata praebet, atque apparet illius aequationem dimidiandis quantitatibus constantibus R et R_1 et mutandis invicem coordinatis x et y ex aequatione (6) deduci, quum hac mutatione su-

perficies (6) per quadrantem circa axem ZA vertatur. Aliter: omnia novae superficiei puncta M jam determinata sunt aequatione $AM = AC \cos CAK$, si igitur $90^0 - CAK = \omega$, $AC = r^1$, $AM = m$ ponitur, his notis substituendis fit, ut sit $m = r^1 \sin \omega$; si porro AQ projectio rectae AK in planum XY est, et angulus $QAX = v$ et $Q_1AX = v_1$ ponitur, apparet $v = 90^0 - v_1$ et ex aequatione (2) esse:

$$r^1 = \frac{RR_1}{R_1 \cos v_1{}^2 + R \sin v_1{}^2}$$
$$= \frac{RR_1}{R_1 \sin v^2 + R \cos v^2}$$

Ergo est
$$m = \frac{RR_1 \sin \omega}{R_1 \sin v^2 + R \cos v^2}$$

vel aequationibus (4) in usum vocatis:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(Rx^2 + R_1 y^2) = RR_1 (x^2 + y^2) z \ldots . (7)$$

Hac aequatione cum ista (6), quam supra invenimus, comparata profecto intelligimus rationem inter duas superficies deductas eam esse, quam modo constituerimus.

Ut curvam inveniamus, in qua omnia curvaturae centra sita sint, circulorum osculantium planis in recta aliqua DA se invicem secantibus, jam planum KAQ_1 per rectam illam DA ductum esse ponamus, et hujus rectae DA situs per angulos $v = \alpha$ et $\omega = \beta$ determinatus sit (ita quidem, ut projectio rectae AD in plano XY ducenda cum axi X angulum α et cum recta DA ipsa angulum β constituat). Quum aequationes rectae AD sint:

$$y = x \tan \alpha$$
$$\text{et } z = \sqrt{(x^2 + y^2)} \tan \beta = x \frac{\tan \beta}{\cos \alpha},$$

et recta AQ_1 aequationes sint:

$$y = - x \tan v_1 \text{ et } z = o,$$

planum AQ_1K per istas rectas ductum hac aequatione est exprimendum:

$$z = \frac{(x \sin v_1 + y \cos v_1) \tang \beta}{\sin (\alpha - v_1)} \ldots (8)$$

Si in hac aequatione angulus v_1 variabilis et anguli α et β constantes dicuntur, eadem quodque planum rectam AD transiens notatur. Aequationes igitur (7) et (8) conjunctae definiunt curvam, quam quaerimus. Quoniam denique invenimus $v_1 = 90 - v$, erit tang $v_1 =$ cotang $v = \frac{x}{y}$, ita ut aequatio (8) mutetur in

$$z = \frac{(x^2 + y^2) \tang \beta}{x \sin \alpha - y \cos \alpha}$$

Haec autem est aequatio coni recti, cujus vertex in puncto initii coordinatarum A situs est, et axis angulum ZAD dimidiat, et latera rectae AZ et AD sunt; ita ut hic conus superficiem novam secans curvam lineam fermet, in qua centra omnia sunt posita ad sectiones referenda, quarum plana se invicem in eadem recta secant. Jam apparet, eundem conum oriri omnibus rectis construendis, in quibus bina plana se normaliter secent, quorum alterum rectam AD, alterum rectam AZ transeat; haec autem constructio illi supponitur, qua ad centrum M obliquae sectionis cujuslibet construendum usi sumus.

DE NONNULLIS SUPERFICIEI PROPRIETATIBUS PRAECIPUIS.

Permultum habet momenti, quod duae superficies varia ratione deducendae eandem unam indolem et naturam habent, quarum aequationes non nisi constantibus quantitatibus inter se differunt; quae constantes quantitates alterius aequationis (6) alterius (7) coustantibus mutandis inter se et duplicandis accipiuntur; porro hujus superficiei deductae natura et aequatio ex proprietatibus

et aequatione prioris alicujus superficiei non pendent, sed in quovis puncto cujusque superficiei rationibus modo explicatis duabus ea superficies deduci potest, neque progrediendo ad alia et alia puncta prioris alicujus superficiei vel transeundo ad puncta alius cujusdam superficiei quicquam nisi constantes quantitates commutatur. Excipienda tantum sunt nonnullarum superficierum puncta singula, quae exemta appellantur, in quibus quidem ratio ipsius r (aequ. 1) citata locum non habet, sed r alia atque citata functio anguli v est.

Elucet deinde e disquisitione, qua superficiem novam ejusque aequationem invenimus, eam superficiem oriri non in auxilium vocata priori superficie quadam et ejus curvatura in sectionibus conspicua, idque simul fieri posse hoc directo modo. Ponamus circulum se vertentem circa diametrum, cujus alterum punctum finale verticis instar fixum sit; diameter autem ita mutetur, ut, si a maximus ejus, b minimus valor est, circulorum his diametris ductorum plana normalia inter se sint, et in plano quoque inclinante ad illa plana sub angulis v et v_1 diametri valor sit

$$p = \frac{ab}{a \cos v^2 + b \cos v_1{}^2}$$

Circulo hac ratione moto et variante superficies ex nulla alia superficie pendens eadem atque supra explicata, ut facile iutelligitur, oritur, quae aptius nunc exprimenda est omissis signis R et R_1 per aequationem:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(ax^2 + by^2) = ab(x^2 + y^2)z \ \dots (9)$$

Notanda etiam haec insignis proprietas est. Si p et p^1 diametri circulorum duorum inter se normalium sunt, qui novam superficiem constituunt, est

$$\frac{1}{p} = \frac{\cos v^2}{b} + \frac{\cos v_1{}^2}{a}$$

$$\frac{1}{p^1} = \frac{\sin v^2}{b} + \frac{\sin v_1{}^2}{a}$$

$$\text{ergo } \frac{1}{p} + \frac{1}{p^1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ vel}$$

$$\frac{p + p^1}{pp^1} = \frac{a + b}{ab};$$

id est, fractio, cujus numerator summa et denominator productum est duarum diametrorum, qui circulos nostrae superficiei generatores, in planis inter se normalibus sitos metiuntur, haec fractio, inquam, constantem habet valorem.

Ex dictis porro hoc sequitur: omnes circuli generatores in eodem puncto A se invicem secantes opposita puncta in communi quasi axi habent, ita ut rectae lineae pars superficie proposita semper contineatur, quocunque modo constantes quantitates a et b datae sint.

Referamus novam superficiem iterum ad aliquam priorem superficiem, de qua illa deducta sit. Quum radiorum R et R_1 valores vel eadem vel contraria signa habere possint, vel alter horum radiorum infinitus proponi queat, apparet, tres praecipue esse formas distinguendas, quas superficies nova definitis constantibus quantitatibus habere possit.

1. Si uterque radius R et R_1 finitus et eodem signo notatus datur, punctum A prioris superficiei omnes versus directiones curvaturam ejusdem naturae habet; cujus generis omnia sphaerae puncta vel alius ellipsoidis ellipticae sunt. Nostra superficies tum omnes versus partes finita est, quod disquisitio nostra dilucide ostendit, quod etiam ex aequatione (6) vel (7) colligitur. Si in illis aequationibus $R = R_1$ ponitur, quod in omnia sphaerae puncta valet atque in singula nonnullarum superficierum puncta cadit, quae umbilici a geometris appellantur, aequatio (7) in hanc sphaerae ipsius mutatur:

$$x^2 + y^2 + z(z - a) = o$$

cujus sphaerae radius $= \frac{1}{2} a$ est.

2. Alter radius $R_1 = \infty$ porro semper habetur, si per punctum A superficiei prioris in unam partem vergens

recta invenitur, quae in illa ipsa superficie curva sita est. Quod exempli causa in omnibus punctis superficierum omnium, quas in planum devolvi posse geometrae dicunt, locum habet; atque curvae aliquae in aliis nonnullis superficiebus talia puncta continent. Sunt enim superficies, quarum altera pars in omnes directiones curvaturas homogeneas, altera oppositas curvaturas ostendit; quas diversas partes curva aliqua semper limitat, in qua cujusque puncti alter radius osculator principalis est infinitus. Si exempli gratia circulus circa lineam tangentem tanquam axem circumagitur, superficiei ortae ea pars, quae huic axi adversa est, hunc versum axem convexa et in directione axi normali concava est; in quoque puncto hujus partis radii R et R_1 valores oppositis signis notatos habent; ea autem pars, quae axi opposita sive aversa est, in ambas directiones descriptas concava est, et hac in parte radii R et R_1 eadem signa habent. Has duas ejusdem superficiei partes curva limitat, in cujus quoque puncto curvatura in unam divectionem evanescit, vel alter radiorum R et R_1 infinitus est.

Si $R_1 = \infty$ ponitur, ex aequatione (6) axis ipsarum y (et ex aeq. 7 axis ipsarum x) est recta, quae tota in superficie deducta sita est. Apparet etiam, eam superficiem versus priorem superficiem esse concavam atque infinitam inveniri; quod jam e deductione explicata et facile ex aequationibus inventis conditione data elucet, atque sequentibus magis perspicue invenietur.

3. Si denique radii R et R_1 signis sibi contrariis sunt notandi, apud punctum A prioris superficiei in utroque latere et concavas et convexas partes invenimus. Puncta hujus generis exempli causa omnia hyperboloidis inveniuntur, quae vertenda hyperbola circa axem imaginarium dictum oritur. Apparet hac conditione superficiem deductam in utramque partem tangentis plani (quod priorem etiam superficiem in puncto A tangit) extensam esse in infinitum.

Superficiei novae indolem aptius et rei accommodatius definiemus si aliam superficierum aequationibus notandarum rationem adhibebimus, ex qua superficies tribus aequationibus determinatur; quaeque enim trium coordinatarum orthogonalium x, y, z vel polarium m, v, ω aequatione ponitur aequalis functioni duarum quantitatum ex aliis non pendentium et indoli superficiei apprime respondentium.

V. c. per radios vectores m et radios osculatores r coordinatae x, y, z exprimi possunt. Quum enim ex aequ. (2) sequatur:

$$\cos v^2 = \left(\frac{r - R_1}{R - R_1}\right) \frac{R}{r}$$

$$\text{et } \sin v^2 = \left(\frac{R - r}{R - R_1}\right) \frac{R_1}{r}$$

his valoribus substitutis ex aequationibus (4) inveniemus:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{m^2}{2r} \\ y &= \pm \frac{m}{2r} \sqrt{\frac{R_1}{r}\left(\frac{R - r}{R - R_1}\right)(4r^2 - m^2)} \\ x &= \pm \frac{m}{2r} \sqrt{\frac{R}{r}\left(\frac{r - R_1}{R - R_1}\right)(4r^2 - m^2)} \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

Apparet autem, si ipsi r constans valor et ipsi m variabilis tribuuntur, his tribus aequationibus unum ex circulis superficiem formantibus exprimi debere, atque si vice versa m constans ponitur et r variabilis, iisdem aequationibus curvam notari, quae sphaera superficiem novam secante oritur; cujus sphaerae radius sit $= m$, et centrum in puncto A positum sit. Itaque m et r variantibus duae curvarum series et superficies ipsa illis aequationibus notantur.

Si porro loco radii vectoris m ejusdem projectione in plano XY constructa $n = m \cos \omega$ utimur, invenitur $m^2 = n^2 + z^2 = 2rz$ (c. f. aequ. 6) et

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{n^2}{2r-z} \\ y &= \pm n \sqrt{\left(\frac{R-r}{R-R_1}\right)\frac{R_1}{r}} \\ x &= \pm n \sqrt{\left(\frac{r-R_1}{R-R_1}\right)\frac{R}{r}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (11)$$

Quae aequationes quantitate n constante et r variante sectionem exprimunt, quam superficies cylindri recti novam superficiem secans producit; cylindri scilicet, cujus axis ille ipsarum z, et cujus radius aequalis constanti n est.

SUPERFICIEI FORMA ACCURATIUS EXPLICATUR.

Ut superficiei forma jam accuratius perspiciatur, curvae sunt investigandae, quae secantibus planis oriuntur. Quem ad finem sufficiet, sectiones perscrutari, quarum plana ad axem ipsarum z normalia sunt. Hae sectiones notatae aequatione $z = c$ copulata cum aequatione (9)

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,(ax^2 + by^2) = ab\,(x^2 + y^2)\,z,$$

si projiciuntur in planum XY in eodem sibi congruentes curvas reddunt, quae hanc aequationem habent:

$$(x^2 + y^2 + c^2)\,(ax^2 + by^2) = abc\,(x^2 + y^2) \quad .. (12)$$

Ut earum curvarum in plano XY sitarum aequationem ad polares coordinatas spectantem conficiamus, substituamus in aequatione (3) pro radio vectore m ejusdem projectionem $m \cos \omega = n$ et ponamus $z = m \sin \omega = c$, unde evenit:

$$n^2 + c^2 = \frac{abc}{a \cos v^2 + b \sin v^2}$$

Aequationes (11) deinde, quum loco valorum $2r$, $2R$, $2R_1$ notas p, b, a in usum vocemus et $z = c$ ponamus, ita ut

$$n^2 = (2r - z)\,z = (p - c)\,c \text{ sit,}$$

illae inquam aequationes transeunt in

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{\frac{(b-p)(p-c)\,ac}{(b-a)\,p}} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)\,bc}{(b-a)\,p}} \end{aligned}\right\} \dots (13)$$

atque aequationes polaribus coordinatis notatas has invenimus:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} v &= \pm \sqrt{\left(\frac{b-p}{p-a}\right)\frac{a}{b}}, \text{ quum } \operatorname{tang} v = \frac{y}{x} \text{ sit,} \\ n &= \pm \sqrt{(p-c)c} \end{aligned}\right\} (14)$$

Quum his uti aequationibus ad investigandas curvas sectionibus formatas aptissimum sit, adjungamus aequationes ex (13) deductas differentiales:

$$\left.\begin{aligned} 2x dx &= \left(\frac{p^2-ac}{b-a}\right)\frac{bc}{p^2}\,dp \\ 2y dy &= \left(\frac{bc-p^2}{b-a}\right)\frac{ac}{p^2}\,dp \end{aligned}\right\} \dots (15)$$

e quibus quotiens differentialis primus deducitur:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}\left(\frac{bc-p^2}{p^2-ac}\right)\frac{x}{y} \dots (16)$$

$$= \pm\left(\frac{bc-p^2}{p^2-ac}\right)\sqrt{\left(\frac{p-a}{b-p}\right)\frac{a}{b}} \dots (17)$$

Ex hac aequatione (17) porro differentianda accipimus

$$\frac{d^2y}{dx\,dp} =$$

$$\frac{\pm\{(bc-p^2)(p^2-ac)-4(p-a)(b-p)pc\}(b-a)}{2(p^2-ac)^2(b-p)^2}\sqrt{\left(\frac{b-p}{p-b}\right)\frac{a}{b}},$$

et haec aequatio multiplicata cum

$$\frac{dp}{dx} = \pm\frac{2p}{bc(p^2-ac)}\sqrt{(b-a)(p-a)(p-c)pbc}$$

efficit: $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$$-\left[\left(\frac{b-a}{p-b}\right)p\right]^{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{p-c}{c}\right)a\right]^{\frac{1}{2}}\frac{[p^4-4cp^3+3(a+b)cp^2-4abcp+abcc]}{b(p^2-ac)^3}\ldots.(18)$$

Triplicem superficiei formam, quam respicientes indolem puncti A cujusvis alius superficiei jam supra discrevimus, constantium quantitatum a et b ratione habita nunc iterum et accuratius quaestioni submittamus.

II.

Constantes quantitates a et b idem habeant signum, ex. gr. positivum, ita ut aequationes (13—18) sub forma inventa adhibere liceat. Ponamus etiam, $b > a$ esse; quo quidem praeposito universam quaestionis vim et indolem non restringimus.

Jam apparet $c = o$ posito etiam $x = o$ et $y = o$ reddi, ita ut curva ad punctum originis A restringatur.

Quod primum ad constantes attinet, elucet valores quantitati c tributos et omnes negativos et eos positivos, qui majores ipsa b sint, reddere coordinatas x et y imaginarias.

Quantitatis non dependentis p rationem contemplantes invenimus, hanc quantitatem fieri debere $>$ vel $= a$ et $p <$ vel $= b$ et $>$ vel $= c$, ne fiant coordinatae imaginariae; quae docent quantitate constante c respecta iterum triplicem caussam discernendam esse, prout $c < a$ vel $c = a$ vel $c > a$ sit; quum enim prioribus sub conditionibus ($c < a$ vel $c = a$) omnes valores inter quantitates a et b positos variabili p tribuere liceat, et sub conditione $c > a$ valores tantum majores quam c (et minores quam b simul sumti) adhiberi possint, ne quantitates radicales determinantes coordinatas fiant negativae. Aliter: si $c < a$ vel $c = a$ datur, omnes circuli superficiei generatores a plano secante (quod parallelum plano XY et ab eodem quantitate c distans ponitur) secantur; si contra $c > a$

datur, ii tantum circuli, quorum diametri non minores quam c sunt, ab illo plano continguntur.

1. Si $c > o$ et $c < a$ datur, variabili p omnes valores positivi majores quantitate a et minores quam b tribui possunt, et cuique tali valori ipsius p pares bini valores (positivi et negativi) ipsarum x et y respondent.

Jam $p = a$ posito erit $x = o$; $y = \pm\sqrt{(a-c)c} =$ tang $v = \infty$; $v = 90^0$; $\frac{dy}{dx} = o$. Una cum p crescente x et n semper crescunt, et tang v decrescit; quae facile intellguntur, quum aequationes (13) et (14) determinantes x et tang v mutamus in

$$x = \pm\sqrt{\left(1 - \frac{a}{p}\right)\left(\frac{p-c}{b-a}\right) bc}$$

$$\text{tang } v = \pm\sqrt{\left(\frac{b-a}{p-a} - 1\right)\frac{a}{b}}$$

$p = b$ sumto, $x = n = \pm\sqrt{(b-c)c}$; $y = o$; $\frac{dy}{dx} = \infty$ inveniuntur.

Primus quotiens differentialis evanescit, si $p - a = o$ vel $p = a$ est, quod jam diximus, aut si $bc - p^2 = o$ ponitur; idem infinitus invenitur $b - p = o$ sumto, quod semper fieri potest, aut si $p^2 - ac = o$ sumitur, quod nunquam ponere licet, quia $p > a$ et $p > c$ esse debet. Restat igitur, accuratius conditionem $bc - p^2 = o$ contemplari. Elucet, iterum triplicem caussam esse discernendam, prout $c < \frac{a}{b}$ vel $c = \frac{a^2}{b}$ vel $c > \frac{a^2}{b}$ sit.

Si $c < \frac{a^2}{b}$ datur, fieri non potest, ut $bc - p^2 = o$ vel $p = \sqrt{bc}$ fiat; semper enim, quia $p >$ vel $= a$ esse debet $bc - p^2$ negativa est quantitas. Quum porro ipsius p functiones $\frac{bc \quad p^2}{p^2 - ac}$ vel $-\left(1 - \frac{(b-a)c}{p^2 - ac}\right)$ et $\frac{x}{y}$ vel

$\left(\frac{p-a}{b-p}\right)\frac{b}{a}$ vel $\left(\frac{b-a}{b-p}-1\right)\frac{b}{a}$ una cum p crescant, in quadrante positivarum coordinatarum primus quotiens differentialis negativus manens continuo crescit; idem $p=b$ sumto infinitus erit; atque ex hoc perspicimus, ordinatam y continuo decrescere, si p crescat.

Curva igitur, si $c < \frac{a^2}{b}$ est, continua finita et ad axes X et Y symmetrica hos axes in punctis quibusdam D ec C (c. f. fig. 3) secat, quorum distantiae ab initio sumtae $AD = \pm\sqrt{(a-c)\,c}$ et $AC = \pm\sqrt{(b-c)\,c}$ sunt; tangentes rectae per haec puncta ductae axibus, quos secant, normaliter insistunt. Si porro e puncto D egredientes singula curvae puncta usque ad C percurrimus, a puncto A removebimur et ad axem appropinquabimur, (quia p et u simul crescunt.) Curva porro nullum inflexionis punctum praebet, quod primi quotientis differentialis mutandi ratio jam demonstrat, atque ex hoc invenitur. In puncto inflexionis secundus differentialis quotiens evanescere deberet; $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ efficitur, si $p=c$ ponitur, quod data conditione fieri non potest, vel si

$$p^4 - 4cp^3 + 3(a+b)\,cp^2 - 4abcp + abcc = o \;\ldots (19)$$

sumitur. Haec autem aequatio, si $p = a + p_1$ ponitur, mutatur in:

$$p_1{}^4 + 4(a-c)\,p_1{}^3 + 3\{(b-a)\,c + 2\,(a-c)\,a\}\,p_1{}^2$$
$$+ 2\{(b-a)c + 2(a-c)\,a\}\,ap + (a^2-bc)\,(a-c)\,a = o;\;..(20)$$

cujus aequationis, quum $c < a$ et $c < \frac{a^2}{b}$ et $b > a$ sit, omnes termini positivi sunt, ita ut illa nullam positivam radicem habeat, et aequatio (19) nullam radicem positivam, quae major quam a sit, habeat, et curva nullum punctum inflexionis ostendat.

Si $c = \frac{a^2}{b}$ datur, primus quotiens differentialis evanescit $p = a = \sqrt{bc}$ sumto. Aequatio (20) mutatur in:

$$p_1^{\,4} + 4(a-c)p_1^{\,3} + 3\{(b-a)c + 2(a-c)a\}p_1^{\,2}$$
$$+ 2\{(b-a)c + 2(a-c)a\}ap_1 = o;$$

quae aquatio radicem $p_1 = o$ habet et per eandem divisa mutatur in aequationem tertii ordinis cujus quisque terminus positivus est. Ex his facile colligitur, aequationem (19) nullam positivam radicem majorem quam a habere. Valori $p_1 = o$ autem, vel $p = a$, quo $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ efficitur, non punctum inflexionis respondet, quoniam primus quotiens differentialis in illo puncto, quod determinatum est per valorem ipsius $p = a$, evanescit, atque ejusdem quotientis signum mutatur. Curva igitur eadem tantum eximia puncta atque priori conditione praebet. Hoc etiam notemus: in puncto D cujusque curvarum, quas hucusque tractavimus, minimam esse curvaturam, atque $c = \frac{a^2}{b}$ posito in puncto D minorem curvaturam quam in respondentibus aliarum curvarum punctis inveniri. Facile etiam colligitur, conditionibus $c < a$ et $c = a$ curvam totam ad punctum A concavam esse (c. f. figg. 3 et 4).

Si $c > \frac{a^2}{b}$ et $c < a$ datur, invenimus $p = \sqrt{bc}$ sumi posse, quo valore $\frac{dy}{dx} = o$ efficiatur. Huic valori ipsius p et valori $p = a$ respondebunt curvae puncta, in quibus lineae curvam tangentes axi X parallelae sunt. Alterum horum punctorum D (c. f. fig. 5) per valorem ipsius $p = a$ definitum coordinatas $x = o$ et $y = \pm\sqrt{(a-c)c} = Y_1$ habet. Si p crecsens et minor quam $\sqrt{bc}$ sumitur primus quotiens differentialis $\frac{dy}{dx}$ positivus manet. Facile ex his colligitur, valorem illum Y_1 minimum aliquem esse. Quod idem invenimus, si Y_{11} valor ordinatae y notatur, quae valori ipsius $p = a + p_1$ respondet, tum enim est:

$$Y_1{}^2 - Y_{11}{}^2 = \frac{(a^2 + ap_1 - bc)p_1}{(b-a)(a+p_1)},$$

quae differentia demonstrat, valorem Y_1 minorem esse quam omnem ipsius y valorem Y_{11}, si p_1, quae positiva quantitas esse debet, minor quam $\frac{bc - a^2}{a}$ sumatur, quod fieri potest, si $c > \frac{a^2}{b}$ datur.

Punctum B porro sit illud, quod valori $p = \sqrt{bc}$ respondet. Apparet, in hoc puncto signum quantitatis $\frac{dy}{dx}$ commutari; si enim $p > \sqrt{bc}$ est, $\frac{dy}{dx}$ est negativa quantitas, si contra $p < \sqrt{bc}$ est, $\frac{dy}{dx}$ positivum valorem accipit. In hoc igitur puncto B maximum invenimus, quod idem jam videmus, si per Y_1 et Y_{11} valores ipsius y notamus, qui valoribus $p = \sqrt{bc}$ et $p = \sqrt{bc} + p_1$ respondent. Erit enim

$$Y_1{}^2 - Y_{11}{}^2 = \frac{ac}{b \quad a}\left(\frac{p_1{}^2}{p_1 + \sqrt{bc}}\right),$$

quae differentia positiva manet, non minus si p_1 $(< \sqrt{bc})$ positiva quam si negativa quantitas est; Y_1 igitur ordinata maxima est.

Primus quotiens differentialis porro, si $p > \sqrt{bc}$ et p crescens ponitur, negativus manens etiam crescit, quia functiones $\frac{x}{y}$ et $\frac{bc - p^2}{p^2 - ac}$ vel $-\left(1 - \frac{(b-a)c}{p^2 - ac}\right)$ simul cum quantitate p crescunt.

Ex his colligitur, curvam in vicinitate puncti D (c. f. fig. 5) convexum et in vicinitate puncti B concavum latus axi X praebere, totum etiam arcum BC concavum ad initium A esse; ita ut inter puncta B et D punctum aliquod E inflexionis inveniri debeat. Quod etiam invenimus, si

contemplamur primum quotientem differentialem, qui evanescit, si $p=a$ et si $p=\sqrt{bc}$ est, atque positivus est, si $p>a$ et $p<\sqrt{bc}$ terminus; ita ut valor ejusdem quotientis aliquis maximus esse debeat. Etiam in aequatione (20), si $c<a$ et $c>\frac{a^2}{b}$ sumitur, terminus constans negativus habetur, ita ut illa aequatio radicem positivam et aequatio (19) radicem reali curvae puncto respondentem habeat. Quum denique omnes aequationis (20) termini ultimo excepto positivi sint, eadem non plures positivas radices sed unam tantum habere potest, atque unum tantum inflexionis punctum in quoque quadrante curvae inest.

2. Si $c=a$ datur, punctum B et concavus arcus BC in quoque quadrante iterum inveniuntur. Punctum D, cujus quum distantia ab initio sumta $DA=\sqrt{(a-c)c}$ inventa sit et $c=a$ posito evanescat, in punctum initii A quasi revertit. Primus quotiens differentialis invenitur:

$$\frac{dy}{xx}=\pm\left(\frac{p^2-ba}{p+a}\right)\sqrt{\frac{b}{(b-p)(p-a)}}$$

Si $p=a$ ponitur, $x=o$, $y=o$, $n=o$, $\tang v=\infty$, $v=90^0$, $\frac{dy}{dx}=\infty$, $\frac{d^2y}{dx^2}=o$ inveniuntur, ita ut curva per punctum initii A transeat et in hoc puncto axem Y tangat et inflectatur et se ipsam secet, arcus porro in vicinitate hujus puncti sumtus positivae axis X parti concavum latus advertat. Crescente p etiam abscissam x crescentem et tang v et angulum v decrescentes invenimus; si $p<\sqrt{bc}$ sive $p<\sqrt{ba}$ est, primus quotiens differentialis positivus est, y igitur crescit una cum p et x; si $p>\sqrt{bc}$ sumitur, y decrescit. Aequatio (20) mutatur in

$$p_1{}^4+3(b-a)ap_1{}^2+2(b-a)ap_1=o,$$

quae aequatio radicem $p_1=o$ habet et divisa per quantitatem p_1 in tertii ordinis aequationem tansit, cujus omnes

termini positivi sunt. Ex his colligitur, conditione $c=a$ neque aequ. (19), neque aequ. (20) ullam positivam radicem habere nisi $p_1=o$ vel $p=a$. In curva igitur nullum aliud punctum inflexionis nisi duplum punctum A continetur. Quam ob rem dici potest, punctum inflexionis E, quod supra invenimus una cum puncto D in initii punctum A conditione $c=a$ concidere et arcum DE evanescere (c. f. fig. 6).

3. Si denique $c>a$ datur, variabili p valores inter quantitates c et b sitos tribuere licet. $p=c$ efficit: $x=o$; $y=o$; $\frac{dy}{dx}=\text{tang}\, v=\pm\sqrt{\left(\frac{b-c}{c-a}\right)\frac{a}{b}}$. Una cum p crescente etiam abscissa x et radius vector u crescunt, angulus v vero decrescit ut sub prioribus conditionibus. $\frac{dy}{dx}$ evanescit, si $p=\sqrt{bc}$ sumitur; idem quotiens etiam, si $p>\sqrt{bc}$ et crescens ponitur, crescit et negativus invenitur. $p=b$ posito erit $x=\pm\sqrt{(b-c)c}$; $y=o$; $\frac{dy}{dx}=\infty$.

Curva igitur in quoque quadrante ad angulum, cujus tangens geometrica est aequalis valori $\pm\sqrt{\left(\frac{b-c}{c-a}\right)\frac{a}{b}}$, restricta est, atque in puncto initii A rectam aliquam AG (cf. fig. 7) tangit, quae cum axi X angulum modo definitum format. Apparet etiam puncta B et C (ut prioribus conditionibus) inveniri, atque eorum naturam et arcus BC naturam non mutari.

Ad naturam arcus AB cognoscendam disquiramus, an inflexionis puncta in eo contineantur. Secundus quotiens differentialis evanescit, si $p=c$ ponitur vel si aequationi (19)

$$p^4-4cp^3+3(a+b)cp^2-4abcp+abcc=o$$

sufficitur. Curva igitur inflectitur in puncto A et in iis punctis quae valoribus ipsius p illi aequationi sufficienti-

bus respondent. Ut tales valores inveniamus, ponamus $p = p_1 + c$, quo illa aequatio mutatur in:

$$p_1^{\,4} + 3(a + b - 2c)cp_1^{\,2}$$
$$+ 2\{(a + b - 2c)c + 2(b - c)(c - a)\}cp_1$$
$$+ 3(b - c)(c - a)c^2 = o \ldots (21)$$

Jam apparet, si $c < \frac{1}{2}(a + b)$ vel $c = \frac{1}{2}(a + b)$ datur aequationem (21) omnes terminos positivos habere, nullam igitur radicem positivam exstare, atque curvae nullum inflexionis punctum inesse. Si contra $c > \frac{1}{2}(a + b)$ datur, aequatio (21) profecto positivas radices continet, quia is terminus, quem $\pm op^3$ scribere possumus, positivum terminum sequitur et negativum antecedit. Ut autem intelligamus, an positivae radices aequationis (19) minores quam b conditione data habeantur, ponamus

$$p_1 = \frac{1}{p - c} - \frac{1}{b - c}, \text{ vel } p = \frac{(b - c)cp_1}{1 + (b - c)p_1},$$

quo aequatio (19) mutatur in:

$$3(c - a)(b - c)^3 p_1^{\,4}$$
$$+ 2(b - c)^3\{4(c - a)(b - c) + (2c - b - a)c\}p_1^{\,3}$$
$$+ 3(b - c)^2\{(a + b)c - 2ab\}p_1^{\,2} + abcc = o.$$

Haec autem aequatio, si $c > \frac{1}{2}(a + b)$ ponitur omnes terminos positivos habet, quam ob rem nullus realis positivus valor ipsius p_1 eidem sufficit; quod docet differentiam $\frac{1}{p - c} - \frac{1}{b - c}$ positivum valorem non habere, si p radix aequationis (19) sit; radix p igitur hac conditione vel negativa quantitas vel major quam b est.

Ex his colligitur, curvam nullum inflexionis punctum excepto puncto A continere, ejusque formam fere convenire cum ea lemniscatae lineae.

Si denique $c = b$ sumitur, etiam ipsi p nullus nisi valor b tribui potest, quod aequatio (3) ordinatam y exprimens demonstrat; tum quidem habetur $y = o$ et $x = o$; curva igitur in punctum tanquam in verticem superficiei alterum restringitur.

Superficiei formam totam jam e forma et indole curvarum, quae plano secante oriuntur et a nobis definitae sunt, perspicies. Videmus superficiem in omnes partes finitam esse et rectam lineam finitam continere, partem quidem axis Z, quam ejus axis puncta determinata aequationibus $z=a$ et $z=b$, aequalem quantitati $b-a$ definiant.

Coordinatarum axibus supra definito modo positis ad priorem aliquam superficiem, superficies deducta in id latus plani XY extensa est, in quo ordinatae z positivae sumuntur. Sectiones plano XY parallelae et vicinae non dissimiles sunt ellipsi (fig. 3 et 4); quarum a plano XY sumta distantia c crescente ipsae extenduntur. Tum autem punctum D ($c>\frac{1}{2}a$ posito) in punctum A revertit, ita ut superficies ipsa in vertice minimi eorum circulorum, qui eandem constituunt, planum ZY tangat. Jam, quum sectionum tractatarum quaeque $c>a$ posito duabus rectis AG (fig. 7) tangatur, secetur et includatur, quae cum axi X angulum formant cujus tangens $=\pm\sqrt{\left(\frac{b-c}{c-a}\right)\frac{a}{b}}$ est, quum porro c crescente haec trigonometrica tangens et ille angulus decrescant, colligimus, illas curvas sectiones majoribus distantiis a plano XY sumtis magis magisque restringi; videmus denique punctum C ($c>\frac{1}{2}b$ posito) axi Z appropinquare atque ($c=b$ sumto) in illum axem incidere.

II.

Si in aequationibus superficiei una quantitatum constantium infinita ponitur, superficiei ipsius natura commutatur, in quo jam accuratius disseramus.

Ponamus $b=\infty$, atque superficiei aequatio (9) transit in:

$$(x^2+y^2+z^2)y^2=az(x^2+y^2) \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Aequatio igitur sectionis plano XY parallelae et in hoc planum projectae est:

$$(x^2+y^2+c^2)y^2=ac(x^2+y^2).$$

Aequationes porro (13) (14) (15) (16) (17) (18) commutantur in has, quae aptius curvas secatas determinant:

$$x = \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)c}{p}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(p-c)ac}{p}}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v = \pm \sqrt{\frac{a}{p-a}}$$

$$n = \pm \sqrt{(p-c)c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\left(\frac{ac}{p^2-ac}\right) = \pm \frac{c\sqrt{(p-a)a}}{p^2-ac}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p(3p^2-4ap+ac)\sqrt{(p-c)acp}}{(p^2-ac)^3}.$$

Jam apparet, quum a quantitas positiva haberi possit, c non negativam quantitatem dari posse.

Si quantitas $c = o$ data est, aequatio curvae transit in $y = o$; curva igitur restringitur in lineam rectam, scilicet axem ipsarum x.

1. Jam $c > o$ et $c < a$ sit. Quum primus quotiens differentialis nunquam infinitus possit fieri, et $p = a$ aut $p = \infty$ posito idem quotiens evanescat, alteri autem horum valorum ipsius p, scilicet $p = a$ respondeant $x = o$ et $y = \pm \sqrt{(a-c)c}$, et alteri $p = \infty$ respondeant $x = \infty$ et $y = \pm \sqrt{ac}$, quum porro y nunquam et x non nisi in causa modo dijudicata evanescat, cuique autem valori ipsius p, qui major quam a est, valores coordinatarum reales respondeant, iique una cum ipsa p crescant, colligimus: curvam ad axes coordinatarum symmetram nusquam axem ipsarum x, axem ipsarum y autem in duobus punctis D (cf. figg. 8. 9), quorum distantiae ab initii puncto A sint $AD = \pm \sqrt{(a-c)c}$, secare; tangentem porro p in haec puncta D ductas axi X parallelas esse, et curvam in

quoque quadrante ramis infinitis AH porrectam asymptotica recta FG gaudere parallela axi X, cujus ab hoc axi sumta distantia sit $AE = \pm \sqrt{ac}$.

Quotiens differentialis secundus, quum $3p^2 - 4ap + ac = o$ vel $p - c = o$ ponatur, evanescere potest; at valores $p = c$ et $p = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{(4a-3c)a}$, quae radices aequationum modo inventarum sunt, admitti non possunt, ne quantitates radicales definientes coordinatas efficiantur imaginariae. Sed valor $p = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{(4a-3c)a}$, qui valor $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ efficit, necessario major quam a est et reali puncto E respondet, in quo curva inflexionem praebet. Quam inflexionem etiam hoc modo invenire possumus: primus quotiens differentialis, quum valor ipsius p aequalis ipsi a deinde autem paulo crescens ponatur, inde a nihilo crescit; quum contra variabilis $p = \infty$ deinde paulo decrescens ponatur, ille quotiens iterum inde a nihilo crescit; e quibus sequitur, quantitatem variabilem p valorem aliquem accipere posse, cui maximus valor primi quotientis differentialis respondeat. Quum denique idem quotiens in quadrante positivarum coordinatarum semper positivus inveniatur, etiam colligimus curvam in parte DE latus convexum et in parte infinita EH concavum latus axi X praebere.

2. Si $c = a$ datur, apparet puncta E et D cum puncto A concidere, quum valor ipsius p punctum E determinans aequalis quantitati a fiat, et idem valor etiam punctum D supra definiverit et efficiat $x = o$ et $y = o$. Quum porro $p = a$ posito primus quotiens differentialis evanescat, axis Y in puncto A curvam tangit. Asymptotae distantiam ab axi X sumtam $FA = a$ invenimus. Colligimus ex his curvam in puncto A inflexam se ipsam secare et ad axem X concavam esse (c. f. fig. 10).

3. Si denique $c > a$ datur, ipsi p valor a tribui non potest, quin x et y fianti maginariae, neque variabilis p valores $\frac{2}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{(4a-3c)a}$ accipit; hi enim aut imaginarii

aut minores quam a sunt, ita ut puncta D et E sint imaginaria. At omnes valores, qui non minores quam c sunt, variabili p tribuere licet. Si $p = c$ sumitur, erit $x = o$; $y = o$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \text{tang}\, v = \pm \sqrt{\frac{a}{c-a}}$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = o$; si p crescit, ita ut $p > c$ sit, ordinatae etiam crescunt, $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativa quantitas (in quadrante positivarum coordinatarum) manet, et $\frac{dy}{dx}$ et tang v decrescunt. $p = \infty$ sumto erit $x = \infty$; $y = \pm \sqrt{ac}$; $\frac{dy}{dx} = o$. Unde intelligitur, punctum A (c. f. fig. 11) inflexionis punctum esse, et tangentem AK per id punctum ductam cum axi X angulum KAX formare, cujus tangens trig. $= \pm \sqrt{\frac{a}{c-a}}$ sit. Apparet etiam ex dictis, in quoque quadrante ramum infinitum in angulo definito restrictum esse et axi X concavum latus praebere neque ullam inflexionem nisi in puncto A ostendere, atque eodem modo, quo prioribus conditionibus, asymptotam rectam parallelam axi X habere, cujus ab hoc axi distantia sit $\sqrt{ac}$. Videmus denique c crescente angulum KAX illum curvam includentem decrescere et distantiam asymptotae ab axi X augeri.

Hinc colligimus superficiem ipsam conditione $b = \infty$ vel aequatione (22) notatam a plano XY in axi toto X tangi, hanc igitur rectam continere, eamque porro non nisi in eo latere plani XY extendi, in quo ordinatae z positivae sumantur.

Deinde superficies planum ZY in punctis secat, quorum ab axi Z sumta distantia $= \pm \sqrt{(a-z)z}$ est, quae igitur circulum formant in illo plano ZY positum et diametro a determinatum. Curvarum asymptotae porro, quas quantitate $\pm \sqrt{ac}$ distare ab axi Z vel a plano ZX cognovimus, ostendunt in propinquitate plani XY superficiem

in directionem axis X extendi, et asymptotas ipsas eam includentes majoribus distantiis a plano XY sumtis magis discedere, ita ut superficies ipsa majoribus distantiis a plano XY magis dilatetur. Quum invenerimus $c \geq a$ posito punctum A curvis (sectionibus) inesse et in eodem illas se ipsas secare et inflecti; colligimus, superficiem axem Z et positivam quidem ejus partem omnem excepta finita parte a continere, eamque se ipsam secantem formare illam rectam.

Si superficiem animo conceperimus, videbimus, eandem quasi foramen circulare, cujus diameter sit aequalis quantitati a, continere. Quum denique asymptotas omnes colligamus, apparet, superficiei tractatae aliam superficiem esse asymptoticam, cujus aequatio $y^2 = az$ demonstrat, hanc superficiem cylindrum esse parabolicum. Haec superficies cylindrica parobolica oritur, si recta ita movetur, ut parallela manens axi X ducatur per puncta parabolae vulgaris in plano ZY constructae, cujus vertex coordinatarum initium, et axis coordinatarum z axis et parameter aequalis $\frac{1}{2}a$ est.

III.

Si constantes quantitates a et b oppositis signis notatae dantur, licet ponere, b esse negativam et a positivam quantitatem. Jam positivis ipsius c variis valoribus sumtis, si sectionum formas scrutati erimus, superficiei formam cognoscemus; apparebit enim curvae sectionis indolem, si c negativa quantitas sit non mutari. Curva superficies expressa hac aequatione:

$$(23) \;..\; (x^2+y^2+z^2)(by^2-ax^2) = abz(x^2+y^2)$$

secata plano parallelo axibus X et Y efficit curvam, cnjus projectio in planum XY exprimitur hac aequatione:

$$(24) \;..\; (x^2+y^2+c^2)\;(by^2-ax^2) = abc(x^2+y^2)$$

Aequationes (13) (14) (16) (17) (18) commutantur in:

$$y = \pm \sqrt{\frac{(p+b)(p-c)ac}{(a+b)p}}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)bc}{(a+b)p}}$$

$$n = \pm \sqrt{(p-c)c}$$

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\, v = \pm \sqrt{\left(\frac{p+b}{p-a}\right)\frac{a}{b}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}\left(\frac{p^2+bc}{p^2-ac}\right)\frac{x}{y} = \pm\left(\frac{p^2+bc}{p^2-ac}\right)\sqrt{\left(\frac{p-a}{p+b}\right)\frac{a}{b}}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \left(\frac{(b+a)p}{p+b}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{(p-c)a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^4-4c^3p^3+3(a-b)cp^2+4abcp-abcc}{b(p^2-ac)^3}\right).$$

Hae aequationes primum ostendunt maximos et infinitos variabili p tributos valores (et positivos quidem, si c positiva quantitas data sit), coordinatas reales et infinitas efficere. Curva igitur ramis infinitis porrigitur. Quum porro aequatio (24) nullas impares potestates coordinatarum x et y contineat, curva symmetra est ad axes X et Y.

Si $c = o$ datur, aequatio (24) restringitur ad hanc: $ax^2 - by^2 = o$, vel $y = \pm x\sqrt{\frac{a}{b}}$ quae aequatio duas rectas per punctum initii A ductas exprimit.

Si $c > o$ et $c < a$ datur, ipsi p omnes positivos valores majores quantitate a tribuere licet. Jam $p = a$ posito evenit $x = o$, $y = n = \pm\sqrt{(a-c)c}$, tang $v = \infty$, $v = 90^0$. Una cum p crescente etiam x et y et n in infinitum crescunt et tang v decrescit ad valorem limitantem $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$. Primus quotiens differentialis, quum $p > a > c$ ergo $p^2 - ac > o$ sit, coordinatis positivis quidem sumtis certo positivus est; idem $p = a$ posito evanescit, et p paulo crescente etiam crescit; maximi valores porro ipsius p efficiunt, ut illius quotientis valor appropinquet ad limitem $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, quem limitem idem quotiens $p = \infty$

posito assequitur. Secundus denique quotiens differentialis evanescit, si $p = c$ est, quod fieri non potest, vel si ponitur

$$p^4 - 4cp^3 + 3(a - b)cp^2 + 4abcp - abcc = o \quad (25)$$

Haec autem aequatio, si $p = p_1 + a$ ponitur, mutatur in

$$p_1{}^4 + 4(a - c)p_1{}^3 + 3\{2(a - c)a - (a + b)c\}p_1{}^2$$
$$+ 2\{2(a - c)a - (a + b)c\}ap_1 + (a^2 + bc)(a - c) = o \quad (26)$$

Quae aequatio, si $2(a - c)c - (a + b)c \geqq o$ vel $c \leqq \frac{2a^2}{3a + b}$ datur, omnes terminos positivos habet, quamobrem nulla ei est positiva radix, ita ut aequatio (25) nullam habeat radicem positivam, quae major sit, quantitate a; nullus igitur valor ipsius p reales coordinatas efficiens reddit $\frac{d^2y}{dx^2} = o$. Quum contra $c > \frac{2a^2}{3a + b}$ et $c < a$ datur termini aequationis (26) duas vices signorum ostendunt, ita ut colligamus, eandem aequationem duas habere posse radices positivas, et duas ex aequationis (25) radicibus determinare valores ipsius p positivos atque majores quam a, qui reales coordinatas efficiant.

Intelligimus e prioribus, curvam (c. f. fig. 12) symmetram ad axes X et Y esse et axem Y in duobus punctis D secare, quorum ab initio A sumta distantia $DA = \pm\sqrt{(a - c)c}$ sit, tangentes porro per haec duo puncta parallelas esse axi X, curvam ipsam deinde ex ramis continuis duobus infinitis, invicem autem non cohaerentibus constare, quorum utrumque in binis quadrantibus (idem versus latus axis X) extendi et utrumque rectas asymtotas duas AG easdem atque alterum habere, harum autem asymptotarum quamque per punctum A transeuntem cum axi X angulum GAX, cujus trigonometrica tangens $= \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ sit, formare. Secundum differentialem quotientem variantem conspicientes concludimus, curvam, si $c < \frac{2a^2}{3a + b}$, detur

nullum inflexionis punctum continere, atque ejus utrumque ramum omnem axi X convexum latus praebere, sin autem $c > \frac{2a^2}{3a+b}$ detur, duo puncta inflexionis E et F invenienda esse (c. f. fig. 13), atque utriusque rami prope punctum D sitam partem DE convexum latus axi X praebere, arcum autem EF (inter puncta inflexionis) concavum, arcum reliquum FH denique infinitum iterum convexum latus ad axem X advertere.

Si sensim c augetur, videmus punctum D primum ab axi X removeri, et $c = \frac{1}{2}a$ sumto distantiam AD maximum valorem $\doteq \frac{1}{2}a$ accipere; et quantitate $c\,(> \frac{1}{2}a)$ porro crescente AD decrescit, vel D revertitur ad punctum A, ad quod advenit, si $c = a$ datur.

Si $c = a$ sumitur, punctum D ad punctum A revertitur, nam $p = a$ efficit $x = o$ et $v = o$. Coordinatae crescunt una cum quantitate p. Primus quotiens differentialis $= \pm\left(\frac{p^2 + ba}{p+a}\right)\sqrt{\frac{a}{(p+b)\,(p-a)b}}$, si $p = a$ ponitur, infinitus est, p crescente positivum decrescentem valorem accipit; $p = \infty$ sumto invenitur $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$. Ergo axis Y curvam in puncto A tangit, et ramus aliquis in quoque quadrante angulo GAY continetur, cujus cotang, $= \sqrt{\frac{a}{b}}$ est, recta AG autem est curvae asymptota. Secundus quotiens differentialis evanescit si $p = a = c$ sumitur, vel si huic aequationi sufficitur (c. f. aequ. [26])

$$p_1{}^4 - 3(a+b)ap_1{}^2 - 2(a+b)a^2p_1 = o.$$

Quum $p_1 = o$ sit radix hujus aequationis, apparet $p = a$ radicem aequationis (25) esse. In puncto A igitur, ubi $p = a$ est, curvam inflexam esse invenimus.

Aequatio modo notata per p divisa transit in:

$$p_1{}^3 - 3(a+b)ap_1 - 2(a+b)a^2 = o$$

haec autem, quod termini et ultimus et paenultimus

sunt negativi, unam positivam et duas negativas radices habet, ita ut p variabilis valorem unum positivum majorem quantitate a accipere possit, qui aequationi (25) sufficiat et punctum alterum F inflexionis in quoque quadrante quaerendum indicet (c. f. fig. 14). Colligimus ex his, partem curvae AF concavum latus et partem FH infinitam convexum latus axi X praebere.

Si quantitates b et a aequales dantur, aequatio, quae $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ efficit, commutatur in:

$$p_1^3 - 6a^2p_1 - 4a^3 = o$$

vel: $(p_1^2 - 2ap_1 - 2a^2)(p_1 + 2a) = o$, unde eveniunt radices hae:

$$p_1 = -2a$$
$$p_1 = a(1 - \sqrt{3})$$
$$p_1 = a(1 + \sqrt{3})$$

quorum valorum ipsius p_1 tertius est, qui valorem $p > a$ efficit, nimirum $p = a(2 + \sqrt{3})$. Eadem jam inveniuntur, quum in aequationem (25) $c = b = a$ substituitur; quae quidem aequatio commutatur in

$$p^4 - 4ap^3 + 4a^3p - a^4 = o$$

vel $(p^2 - 4ap + a^2)(p^2 - a^2) = o$; hujus autem aequationis radices $p = +a$ et $p = a(2 + \sqrt{3})$ realibus quantitatum x et y valoribus respondent et inflexionis puncta determinant.

Si tandem $c > a$ datur, valores ipsius p majores quantitate c admitti possunt. $p = c$ sumto $x = o$ et $y = o$, tang $v = \sqrt{\left(\frac{c+b}{c-a}\right)\frac{a}{b}} = \frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ inveniuntur; p crescente et x et y crescunt, tang v decrescit et primus quotiens differentialis valorem semper positivum accipit; si $p = \infty$ sumitur, $x = \infty$ et $y = \infty$ et tang v iterum aequalis $\frac{dy}{dx}$ inveniuntur, est enim $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, denique $\frac{dy^2}{dx^2} = o$ est. Hinc colligimus, curvae (c. f. fig. 15)

ramum quemque in quadrantibus singulis porrectum in angulo KAH contineri, qui angulus determinatur per:

$$\tang KAX = \pm \sqrt{\left(\frac{c+b}{c-a}\right)\frac{a}{b}}$$

$$\text{et } \tang HAX = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Recta quidem KA tangit curvam in puncto initii A, et recta HA in infinite remoto puncto, vel HA est curvae asymptota. Apparet etiam, remotiores curvae arcus convexos esse ad asymptotas et ad axem X; curvae partem puncto A propiorem autem concavam esse ad eundem axem; ita ut concludamus, punctum curvae aliquod F inflexionis inveniri. Idem etiam colligimus ex aequatione (26) quae omnes terminos primo excepto negativos ostendit (conditione $c > a$), unam igitur tantum radicem positivam habet, ita ut aequatio (25) radicem unam positivam, majorem quantitate a, reali curvae puncto respondentem, puncto quidem inflexionis alicui F habeat, neque curva plura talia puncta contineat.

Sectionum plano XY parallelarum figuris intellectis totius superficiei formam perspicere possumus. Ea planum XY duobus lineis rectis secat, et plana duo per has rectas et axem Z posita asymptotica curvae superficiei sunt. Axis Z porro prorsus superficie contentus est exceptis partibus finitis puncto A propioribus, lineis quidem, quas quantitates a et b determinant. Superficies deinde infinite extensa in quamque directionem et continua duo quasi foramina continet plana et circularia, definita diametris a et b. Apparet etiam, rectam per peripherias foraminum dictorum motam et singulis foraminum planis continuo normalem cylindros efficere rectos duos, qui curvam superficiem tangant. Asymptotica plana et planum XY angulos corporeos octo formant, quorum quatuor superficiem continent, horum quidem bini oppositi sunt. Nostris conditionibus in directionem positivarum z super-

ficies angulis duobus axem Y continentibus includitur, et altero plani XY latere in directionem quidem negativarum coordinatarum z angulis duobus axem x continentibus corporeis habetur. Apparet autem in his angulis porrectas superficiei partes inter se conjunctas esse, et tribus rectis quidem infinitis, quarum una (axis Z) interrupta est, se contingere.

Si $b = a$ datur, facile apparet, in utrumque plani XY latus congruentes partes porrigi.

Quum rectas tangentes, quas AK diximus (quae quidem sectiones dissertas in puncto A tangunt), consideremus, elucet, easdem superficiem curvam formare, quae, quum tang. $KAX = \sqrt{\left(\frac{c+b}{c-a}\right)\frac{a}{b}}$ invenerimus, per hanc aequationem

$$\left(\frac{z+b}{z-b}\right)\frac{a}{b} = \frac{y^2}{x^2} \text{ vel } z = \frac{ab(x^2+p^2)}{by^2-ax^2}$$

exprimitur et nostram superficiem in axi Z et secat et tangit et eadem plana asymptotica atque illa habet.

CURVAE INVENIUNTUR, QUAE CIRCULOS OMNES TRACTATAM SUPERFICIEM CONSTITUENTES NORMALITER SECANT.

Superficiem jam supra (c. f. aequationes 10 et 11) tribus aequationibus notavimus, quae coordinatas tres ex duabus quantitatibus ad arbitrium variandis pendentes determinant, atque notavimus una harum quantitatum constante semper systema curvarum linearum definiri. Quaeramus nunc denique systema linearum, quae circulos omnes, quos superficiei generatores diximus, normaliter secent.

Curvae duae, quarum altera coordinatis x, y, z, altera coordinatis x_1, y_1, z_1 notatur normaliter se invicem secant, si harum sex quantitatum differentialia efficiunt:

$$dx\, dx_1 + dy\, dy_1 + dz\, dz_1 = o.$$

Aequationes (11) superficiem definientes facile accipiunt hanc formam

$$x = n \cos v$$
$$y = n \sin v$$
$$z^2 + n^2 = 2rz.$$

In his aequationibus n est linea recta, quae, si aliquod superficiei tractatae punctum in planum XY projicitur, hoc projectum punctum cum initio coordinatarum conjungit; porro in iis v angulus est, quem eadem linea cum axi X format, et r radius circuli, qui angulo v respondet et ex hoc angulo solo pendet (c. f. aequ. 2). Si quantitates v et r constantes et n variabilem ponimus, aequationes modo notatae circulum aliquem determinant et has aequationes differentiales efficiunt:

$$dx = \cos v.\ dn$$
$$dy = \sin v.\ dn$$
$$dz = -\frac{n}{z-r}.\ dn = \frac{2nz}{n^2-z^2}.\ dn.$$

Substitutis differentialium dx, dy, dz valoribus in aequationem conditionalem supra citatam, (quae duas lineas curvas se normaliter secantes efficit), accipitur:

$$\cos v\ dx_1 + \sin v\ dy_1 + \left(\frac{2nz}{n^2-z^2}\right) dz_1 = o.$$

Quoniam linea curva, quae coordinatis x_1, y_1, z_1 notatur, in superficie disserta sita est, loco notarum x_1, y_1, z_1 notas x, y, z substituere licet, atque illa aequatio modo inventa, quum $\cos v = \frac{x}{n}$, $\sin v = \frac{y}{n}$ sit, commutatur in:

$$xdx + ydy + \left(\frac{2n^2z}{n^2-z^2}\right) dz = o.$$

Quum porro $n^2 = x^2 + y^2$ atque $ndn = xdx + ydy$ sit, accipimus:

$$dn + \left(\frac{2nz}{n^2-z^2}\right) dz = o$$

et, quum $z^2 = t$ posito $2zdz = dt$ sit, accipimus

$$dn + \frac{n\,dt}{n^2 - t} = o, \text{ vel } dn + \frac{n\,dt - t\,dn}{n^2} = o,$$

quae denique aequatio per integrationem efficit:

$$n + \frac{t}{n} + \text{Const.} = o \text{ vel } n^2 + t + n \text{ Const.} = o,$$

vel valoribus quantitatum n et t iterum inducendis

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{C.} \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (27)$$

Jam apparet, hac aequatione superficiem aliquam, natura constantis C definita, determinari, eaque nova superficie priorem superficiem aequatione (9)

$$(x^2 + y^2 + z^2)(ax^2 + by^2) = abz(x^2 + y^2)$$

expressam secante lineam curvam formari, quae linea curva secata et aequationibus (9) et (27) definita omnes circulos (generatores dictos) normaliter secet; atque elucet, quantitate C varianda systema linearum curvarum infinite numerosarum oriri, quae omnes omnibus illis circulis normales sint.

Quod ad naturam superficiei aequatione (27) notatae attinet, jam perspicimus, eam, quum illa aequatio functiones quantitatis $(x^2 + y^2)$ neque alias quantitatum x et y functiones contineat, esse ex iis superficiebus, quae linea aliqua circum rectam aliquam vertenda formentur. Aequatio (27), si $x^2 + y^2 = n^2$ ponitur, mutata in $z^2 = (C - n)n$ circulum, qui axem Z in puncto coordinatarum initiali tangit et diametrum C habet, determinat. Unde sequitur, ut, si circulus in plano aliquo per axem Z posito eundem axem in puncto initiali tangens diametro ad arbitrium definita describitur, atque circum axem illum vertitur, superficies nova formetur, quae superficiem dissertam (aequ. 9) in linea omnes circulos superficiei generatores normaliter percurrente secet.

Si superficiei aliquod punctum datur, facile quantitas C respondens inveniri potest; atque, si punctum P superficiei in circulo APD (c. f. fig. 16) situm proponitur, apparet, rectam DP prolongatam in plano XY punctum Q

determinare, quod cum puncto A initiali conjunctum efficit: $AQ = \frac{AP^2}{AM} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, ita ut AQ quantitatem C repraesentet. Hac recta $AQ = C$ inventa circulus APD et ejus auxilio construi potest superficies, quae priorem secans curvam quaesitam format. Hinc etiam apparet, punctum P definiri hac aequatione:

$$\frac{PM}{AM} = \frac{QA}{AD} \text{ vel } \frac{z}{n} = \frac{C}{2r},$$

quo efficitur $2rz = nC$. Idem jam accipitur, si functio $(x^2 + y^2 + z^2)$ ex aequationibus (9) et (27) eliminatur, atque elucet, ad lineam circulis normalem construendam punctum P datum cum vertice D circuli illud punctum continentis recta conjungendum esse, hanc rectam DP porro ad plani XY punctum Q prolongandam atque ita movendam esse, ut punctum Q in plano XY circulum radio AQ definito construat, et punctum D omnes vertices circulorum percurrat, qui cuique plani ZAQ situi respondeant. Superficies ergo hac ratione formata et aequatione $2rz = nC$ vel

$$(ax^2 + by^2)C = z\sqrt{x^2 + y^2}$$

definitae asdem curvas atque superficies (27) secans superficiem (9) format.

Loco notarum C, $2r$, $2R$, $2R_1$ signa q, p, a, b in usum vocemus atque in aequationes (11) inducamus, quae, quum $nC = 2rz$ vel $nq = pz$ sit, commutantur in has

$$z = \frac{pq^2}{p^2 + q^2}$$

$$y = \pm \frac{p^2 q}{p^2 + q^2} \sqrt{\left(\frac{p - b}{a - b}\right)\frac{a}{p}}$$

$$x = \pm \frac{p^2 q}{p^2 + q^2} \sqrt{\left(\frac{a - p}{a - b}\right)\frac{b}{p}}$$

Coordinatae porro polares inveniuntur:

$$\operatorname{tang} v = \pm \sqrt{\left(\frac{p - b}{a - p}\right)\frac{a}{b}}; \; n = \frac{p^2 q}{p^2 + q^2}; \; \operatorname{tang} \omega = \frac{q}{p}$$

Hae igitur aequationes coordinatas normales aut polares notantes superficiem ita definiunt, ut eae, si quantitas p constans est, et q varians ponitur, circulum aliquem, et alio valore ipsius p sumto alium circulum determinent, systema ergo omnium circulorum generatorum notent; atque vice versa, si q constans et p variabilis est, aequationes illae lineam curvam omnes circulos normaliter secantem et hoc modo etiam omnium talium curvarum systema definiunt.

VOLUMEN SUPERFICIE INCLUSI CORPORIS INVENTUM.

Ad inveniendum elementum differentiale corporis, quod superficie tractata limitatur et comprehenditur, duos circulos superficiei generatores et duo plana axi ipsarum z normalia animo concipias. Ponas porro inclinationis angulum, quem illa priora circulorum plana habeant, minimum esse, ita ut is possit dv dici, et distantiam planorum axi ipsarum z normalium minimam dz esse, habebis elementum quaesitum corporeum. Hoc elementum prisma illis quatuor planis et superficie ipsa limitatum arbitrari tibi licet, cujus basis est triangulus, in quo unum latus curvae minima parte formatur; atque hujus basis loco sector circularis angulo dv et radio $\sqrt{x^2 + y^2}$ definitus sumendus et aequalis $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,dv$ ponendus est; altitudo prismatis est dz. Illud ergo corporeum differentiale est $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,dv\;dz$; vel, quum $x^2 + y^2 + z^2 = pz$ sit, idem differentiale est

$$= \tfrac{1}{2} p\,z\,dv\,dz - \tfrac{1}{2} z^2\,dv\,dz.$$

Hoc differentiale respectu ipsius dz integratum, quum quantitas z ex quantitatibus p et v non pendeat, efficit:

$$\tfrac{1}{4}\,pz^2dv - \tfrac{1}{6}\,z^3dv + C\,dv.$$

Quod integrale inter ipsius z limites p et o sumtum, ter-

mino constantem factorem C continente hac ratione emisso, efficit:

$$\tfrac{1}{4}\, p^3 dv - \tfrac{1}{6}\, p^3 dv \text{ vel } \tfrac{1}{12}\, p^3 dv.$$

Apparet, hac functione $\frac{1}{12} p^3 dv$ spatium corporeum sectoris notari, qui duobus circulis generatoribus minimum inclinationis angulum dv formantibus et parte respondente superficiei angusta includatur. Ad ejusdem deinde functionis integrale inveniendum respiciamus valorem circuli cujusvis radii $r = \dfrac{RR_1}{R \sin v^2 + R_1 \cos v^2}$ (aequ. 2) vel, quum $2r = p$, $2R = b$, $2R_1 = a$ sit positum, $p = \dfrac{ab}{a \cos v^2 + b \sin v^2}$; et differentiale dv commutemus in

$$dv = \pm \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{ab}{(b-p)(p-a)}}\, dp;$$ quo valore ipsius dv illud sectoris corporei differentiale $\frac{1}{12} p^3 dv$ commutatur in:

$$- \tfrac{1}{24}\, p^2 \sqrt{\frac{ab}{(b-p)(p-a)}}\, dp,$$

ita ut corporis superficie disserta limitati volumen sit

$$= \tfrac{1}{24} \sqrt{ab} \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{(p-a)(b-p)}}$$

$$= -\tfrac{1}{96} \sqrt{ab}\, \{2p + 3(a+b)\} \sqrt{(b-p)(p-a)}$$

$$+ \tfrac{1}{192} \sqrt{ab}\, \{4ab + 3(a+b)^2\}\, arc \cos\left(\frac{a+b-2p}{b-a}\right) + C.$$

Hoc integrale, si quantitati p valor b tribuitur, erit $\frac{1}{192}\sqrt{ab}\{4ab + 3(a+b)^2\} arc. \cos(-1) + C$; et, si $p = a$ ponitur, accipimus

$$\tfrac{1}{192} \sqrt{ab}\, \{4ab + 3(a+b)^2\}\, arc. \cos(1) + C$$

ita ut inter ipsius p limites a et b totius corporis superficie comprehensi volumen habeatur:

$$\tfrac{1}{96} \sqrt{ab}\, \{4ab + 3(a+b)^2\}\, \pi$$

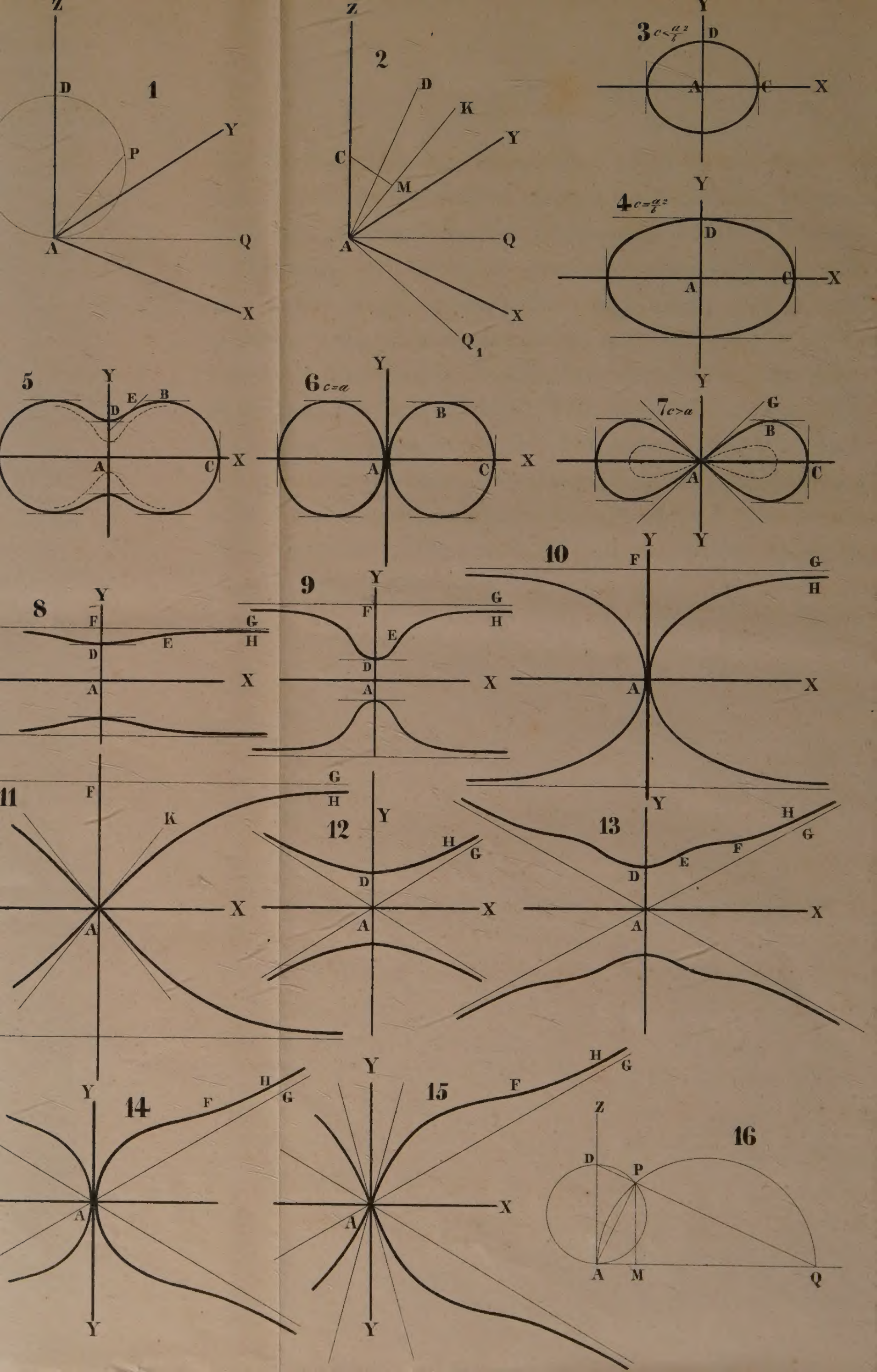
Apparet superficiem, si $b = a = 2r$ ponatur, sphaeram fieri, atque re vera hoc valore substituto volumen inventum mutatur in $\frac{4}{3}\, r^3\, \pi$.

Quum denique superficiem tractatam ad aliquod superficiei alicujus punctum referamus, in quo curvatura in omnes partes ejusdem est generis, notis igitur R et R_1 iterum in usum vocandis accipimus volumen corporis omnibus circulis osculatoribus normalibus ad illud punctum pertinentibus limitati $\frac{1}{12}\sqrt{RR_1}\,[4RR_1 + 3(R + R_1)^2]\pi$; et volumen corporis, cujus superficies omnia centra curvaturae ad idem illud punctum pertinentia continet, est: $\frac{1}{96}\sqrt{RR_1}\,[4RR_1 + 3(R + R_1)^2]\pi$.

VITA.

Natus sum Christianus Augustus Hermannus Marbach Javoriae d. XI. m. Aprilis anni MDCCCXVII parentibus Henrico Marbach, qui sacerdotis munere fungebatur, et Augusta e gente Ludoviciorum. Pater optimus et dilectissimus mihi puero decem annos nato morte praematura est ereptus; matre adhuc superstite gaudeo. Litterarum elementis Javoriae imbutus gymnasium Lignitiense praecipue Pinzgeri, Werneri et Kummeri, virorum humanissimorum, doctissimorum auspiciis florens adii. Maturitatis testimonium adeptus anno MDCCCXXXVI philosophiae et matheseos et physices studia Halis amplexus sum. Philosophiam me docuerunt Gruber, Erdmann, Hinrichs, Schaller; matheseos praeceptores mihi contigerunt Rosenberger, Sohnke, physicarum artium Kaemtz, Germar, Schweigger-Seidel, professores clarissimi. Imprimis autem Schweiggeri, viri ornatissimi egregia institutione physicarum litterarum amore magis magisque exarsi ejusque eximiam erga me benevolentiam memoria semper tenebo gratissima. Anno MDCCCXXXVIII Berolinum me contuti, ut interessem Gableri scholis logicis, Steineri geometricis, Dovii Ermanique physicis. Paulo

post Lipsiae **Drobischio**, **Erdmanno**, **Moebio** et fratre meo ducibus litteris operam dare perrexi. Examinibus pro facultate docendi superatis per annum Dresdae in gymnasio, cui doctor et professor **Blochmann** praeest, praeceptoris munus subii. Sed quum semper mihi esset in votis, ut praeceptoris munere fungerer in schola publica eaque patria, Vratislaviam non multo post festos dies paschales anni MDCCCXLI adii, ubi ducibus Dr. **Reichio** professore et Dr. **Kletkio** scholas celebres egregie moderantibus, viris doctissimis et optime de me meritis ad docendi munus subeundum me praeparavi. Hoc tempore collaboratoris locum in schola civili superiore hujus urbis teneo.


1
Z
D
P
Y
A
Q
X
2
Z
D
K
C
Y
M
A
Q
X
Q1
3 c<a²/b
Y
D
A
C
X
4 c=a²/b
Y
D
A
C
X
5
Y
E
B
D
A
C
X
6 c=a
Y
B
A
C
X
7 c>a
Y
G
B
A
C
Y
8
Y
F
G
D
E
H
X
A
9
Y
F
G
E
H
D
X
A
10
Y
F
G
H
A
X
11
F
G
H
K
X
A
12
Y
H
G
D
X
A
13
Y
H
G
F
E
D
X
A
14
Y
H
F
G
A
Y
15
Y
H
G
F
X
A
Y
16
Z
D
P
A
M
Q